

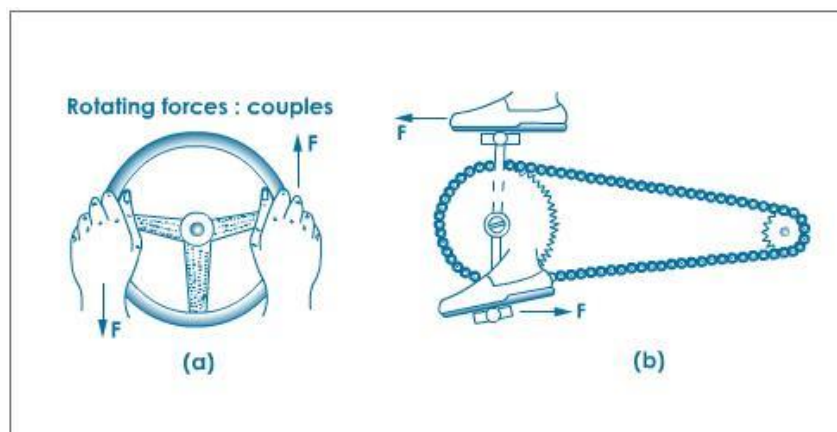
Le balancier du funambule

Benoît DE BOECK

L'équilibre

Le funambule sur son fil est en déséquilibre permanent. Il doit donc sans cesse rétablir son équilibre. A cet effet il utilise un balancier (contrairement au fil-de-fériste qui n'utilise que ses bras et ses jambes). Les grandeurs physiques qui permettent de comprendre comment le funambule utilise son balancier pour rester sur son fil sont: le couple de forces et le moment d'inertie. Le funambule exerce un couple de forces pour mettre le balancier en rotation et le moment d'inertie du balancier permet à ce dernier de résister à cette rotation. De quoi s'agit-il ?

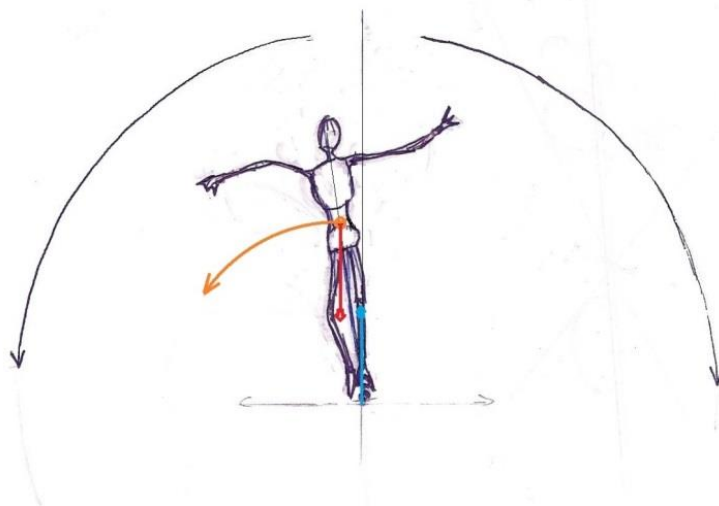
Un couple de forces est l'effort en rotation appliqué à un axe. Il est ainsi nommé en raison de la façon caractéristique dont on obtient ce type d'action: un bras qui tire, un bras qui pousse, les deux forces étant égales et opposées¹. Deux exemples concrets sont illustrés ci-dessous, le conducteur qui tourne son volant et le cycliste qui pédale:



Le premier couple de forces qui intervient dans le cas du funambule est le couple formé par son poids qui le tire vers le bas et la réaction du câble qui s'exerce vers le haut. Dès que le funambule perd l'équilibre, ces 2 forces ne sont plus alignées et le funambule est mis en rotation par rapport au câble.

¹ Référence : [http://fr.wikipedia.org/wiki/Couple_\(physique\)](http://fr.wikipedia.org/wiki/Couple_(physique))

La figure ci-dessous provient d'un compte-rendu de conférence de Jérôme d'Orso, membre de l'Axis Syllabus. On y voit en rouge le poids du funambule qui s'exerce sur son centre de gravité (proche du nombril) et en bleu la réaction du câble.



Pour rétablir son équilibre, le funambule doit exercer un couple inverse à celui qui l'entraîne. S'il tombe à gauche, il fait tourner son balancier vers la gauche pour que celui-ci, par réaction, exerce un couple vers la droite afin de compenser. On voit donc que le balancier ne sert pas à faire descendre le centre de gravité. En effet le centre de gravité du funambule n'est pas influencé par son balancier quand il le tient à hauteur du nombril car c'est précisément là que se situe le centre de gravité d'un corps humain.

En réalité, le funambule s'appuie sur son balancier pour éviter de tomber. Pour être efficace, il faut donc que le balancier offre de la résistance à la prise d'appui du funambule. La résistance du balancier au mouvement de rotation que lui imprime le funambule est proportionnelle à une quantité que l'on appelle le moment d'inertie. L'efficacité d'un balancier dépend donc de son moment d'inertie.

Le moment d'inertie est une grandeur physique qui caractérise la géométrie des masses d'un solide, c'est-à-dire la répartition de la matière en son sein, par rapport à un axe de rotation. Il quantifie également la résistance à une mise en rotation de ce solide, et a pour dimension le produit d'une masse et du carré d'une longueur, qui s'exprime en $\text{kg}\cdot\text{m}^2$. C'est l'analogue pour un solide de la masse inertielle qui, elle, mesure la résistance d'un corps soumis à une accélération linéaire.²

² Référence : http://fr.wikipedia.org/wiki/Moment_d'inertie

Balancier 1

Tentons d'être concrets et prenons une perche de 6 m de long, rigide mais ne pesant rien. Mettons à chaque extrémité une masse (appelée poids dans le langage courant) de 1 kg. Quel est le moment d'inertie du balancier que nous venons de construire ? Cette quantité physique (qui est notée J) est calculée en multipliant la masse par le carré de la distance au centre de rotation:

$$J = m \times r^2$$

Le centre de rotation du balancier se situe en son milieu. Nous avons donc 2 fois une masse de 1 kg qui tourne autour d'un axe situé à 3 m (le milieu de la perche). Le moment d'inertie vaut donc:

$$J = 2 \times 1\text{kg} \times (3\text{m})^2 = 18 \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

Un balancier efficace doit avoir un grand moment d'inertie pour offrir une résistance suffisante au funambule qui veut rétablir son équilibre. Une manière de l'obtenir est d'augmenter la masse (puisque le moment d'inertie est proportionnel à la masse, comme l'indique la formule). Or il est également souhaitable que le balancier soit le plus léger possible (afin de limiter l'effort de devoir le porter pendant longtemps). Comment concilier les deux ?

L'équation (ou la formule) du moment d'inertie montre que pour une même masse, le moment d'inertie est d'autant plus grand qu'elle est éloignée du centre. Ceci signifie qu'un balancier doit être le plus long possible. Par ailleurs on voit que la masse près du centre est peu efficace car elle augmente le poids sans augmenter le moment d'inertie (le balancier devient plus lourd sans être plus efficace). L'idéal est donc un balancier dont la perche est la plus légère possible, la plus longue possible, tout en étant assez solide pour mettre du poids aux 2 extrémités.

Voyons maintenant quelques exemples de balanciers afin d'analyser comment en optimiser la conception.

Balancier 2

Prenons pour commencer un tube en acier de 6 m de long (la demi-longueur $L = 3$ m), de 30 mm de diamètre extérieur (le rayon extérieur $r_e = 0,015$ m) et de 26 mm de diamètre intérieur (le rayon intérieur $r_i = 0,013$ m). La section vaut :

$$A = \pi(r_e^2 - r_i^2) = \pi(0,015^2 - 0,013^2) = 0,000176 \text{ m}^2$$

Le volume d'acier du tube est de :

$$V = 2 \times L \times A = 2 \times 3 \times 0,000176 = 0,001056 \text{ m}^3$$

La densité de l'acier vaut environ 7,8 soit 7800 kg/m^3 ; le poids du tube est donc de :

$$P = 7800 \times 0,001056 = 8,23 \text{ kg}$$

Mais quel est son moment d'inertie ? Nous voyons que nous ne pouvons plus simplement appliquer la formule $J = m \times r^2$ puisque la masse n'est plus située à un endroit précis, mais qu'elle est distribuée le long du tube. Il faudrait faire la somme d'une infinité de masses infiniment petites situées tout le long du tube ! Heureusement, les mathématiciens ont inventé une méthode pour faire des sommes infinies; c'est la méthode des « intégrales ». Comment cela fonctionne-t-il ?

Nous allons découper (virtuellement) le tube en une infinité de tranches infiniment fines. L'épaisseur des tranches est notée dx . Notons ρ (la lettre grecque rhô) la masse linéique du tube (c.-à-d. le nombre de kilos par mètre). La masse de chaque tranche est donc de $\rho \times dx$, et cette masse est à une distance x du centre de rotation. Le moment d'inertie de chaque tranche est donc de :

$$J = \rho \times dx \times x^2$$

Nous allons maintenant intégrer cette équation sur une moitié du tube (c'est-à-dire pour x allant de 0 à L) et multiplier le résultat par 2 pour obtenir le moment d'inertie du balancier :

$$J = 2 \int_0^L \rho x^2 dx$$

$$J = 2\rho \int_0^L x^2 dx$$

$$J = \frac{2}{3} \rho L^3$$

Dans notre cas L est égal à 3 m et ρ vaut :

$$\rho = 7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 0,000176 \text{ m}^2 = 1,37 \text{ kg/m}$$

Et le moment d'inertie vaut :

$$J = \frac{2}{3} \times 1,37 \times 3^3 = 24 \text{ kg.m}^2$$

On constate que notre balancier 2 est 4 fois plus lourd que notre balancier 1 mais que son moment d'inertie n'est que de 30% supérieur. C'est normal : le balancier 1 est un balancier idéal dont la perche ne pèse rien ! Son « efficacité » est donc bien meilleure.

Il est temps de voir comment comparer les balanciers entre eux. Un balancier est caractérisé par son moment d'inertie et son poids, mais aussi, pour des questions pratiques, par sa longueur. De ces 3 valeurs on peut tirer des grandeurs intéressantes. Si 2 balanciers ont le même poids, celui qui a le plus grand moment d'inertie est bien sûr le plus intéressant ; nous dirons le plus « efficace ». Je propose de définir l'efficacité d'un balancier comme étant le rapport du moment d'inertie sur le poids, et de la noter e .

Pour le balancier 1 ce rapport vaut :

$$e = 18 \div 2 = 9 \text{ m}^2$$

Et pour le balancier 2 :

$$e = 24 \div 8,23 = 2,9 \text{ m}^2$$

Une efficacité nettement plus faible donc pour le balancier 2. Notons que très curieusement l'efficacité d'un balancier prend la dimension d'une surface. Je ne sais pas quel sens donner à cette constatation.

Nous avons vu que pour un balancier idéal, tout le poids se situe aux extrémités. Pour une longueur donnée, un tel balancier a le plus grand moment d'inertie possible. La seule manière de l'augmenter est d'allonger le balancier. On peut donc définir le rendement d'un balancier comme étant le rapport de son moment d'inertie sur le moment d'inertie d'un balancier idéal de même longueur et de même poids. Je propose de le noter η (la lettre grecque êta).

Par définition, le rendement du balancier 1 vaut 100%. Pour calculer le rendement du balancier 2 il faut d'abord calculer le moment d'inertie d'un balancier idéal de même poids (8,23 kg) et de même longueur (6 m) :

$$J = 2 \times 4,115 \text{ kg} \times (3\text{m})^2 = 74 \text{ kg.m}^2$$

Le rendement de notre balancier 2 n'est donc que de $24 \div 74 = 33\%$!

Résumons. Le moment d'inertie d'un balancier caractérise son efficacité : plus il est élevé, plus le funambule peut s'appuyer sur son balancier pour rétablir son équilibre. Le poids caractérise l'effort que le funambule va devoir faire pour porter son balancier : plus il est faible et plus le balancier est facile à porter. La longueur caractérise son encombrement : plus il est court, moins il prend de place. Un bon balancier est donc celui qui a un grand moment d'inertie, un poids faible, et qui est court.

Que faire pour augmenter le rendement de notre balancier ? Il faut d'une part alléger la partie centrale et d'autre part mettre du poids le plus loin possible. Faisons un nouvel essai.

Balancier 3

L'aluminium est à la fois solide et léger. Nous allons l'utiliser pour la partie centrale. Par ailleurs nous allons porter la longueur de notre balancier à 8m. La partie centrale est un tube en aluminium de 2 m de long, de 35 mm de diamètre extérieur (le rayon extérieur $r_e = 0,0175$ m) et de 31 mm de diamètre intérieur (le rayon intérieur $r_i = 0,0155$ m). La section vaut :

$$A = \pi(r_e^2 - r_i^2) = \pi(0,0175^2 - 0,0155^2) = 0,000207 \text{ m}^2$$

La densité de l'aluminium vaut environ 2,7 soit 2700 kg/m^3 ; la masse linéique du tube (ρ) vaut :

$$\rho = 2700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 0,000207 \text{ m}^2 = 0,56 \text{ kg/m}$$

Et le moment d'inertie de la partie centrale vaut :

$$J = \frac{2}{3} \times 0,56 \times 1^3 = 0,4 \text{ kg.m}^2$$

Les parties extérieures sont faites avec 3 m du même tube en acier que pour le balancier 2 ; nous en connaissons donc la masse linéique : $\rho = 1,37 \text{ kg/m}$. Le calcul du moment d'inertie est un peu plus compliqué car le tube commence à 1 m du centre de rotation et s'étend jusqu'à $1 + 3 = 4$ m. L'intégrale ne doit donc plus être calculée de 0 à L mais de L1 à L2 :

$$\begin{aligned} J &= 2\rho \int_{L1}^{L2} x^2 dx \\ J &= \frac{2}{3} \rho \times (L2^3 - L1^3) \\ J &= \frac{2}{3} 1,37 \times (4^3 - 1^3) = 57,5 \text{ kg.m}^2 \end{aligned}$$

Le moment d'inertie du balancier est la somme du moment de la partie centrale et des extrémités :

$$J = 0,4 + 57,5 = 58 \text{ kg.m}^2$$

Le poids du balancier se calcule facilement à partir de la longueur et de la masse linéique de chaque partie :

$$P = 0,56 \times 2 + 1,37 \times 6 = 9,34 \text{ kg}$$

Son efficience vaut :

$$e = 58 \div 9,34 = 6,2 \text{ m}^2$$

Le moment d'inertie idéal de notre balancier vaut :

$$J = 9,34 \text{ kg} \times (4\text{m})^2 = 149 \text{ kg.m}^2$$

Son rendement est donc de $58 \div 149 = 39\%$; un peu meilleur que le balancier 2. On voit que mettre une partie centrale en aluminium améliore la situation. Peut-on encore faire mieux ?

Balancier 4

Les perches en fibre de carbone sont très légères et très résistantes. J'ai acquis une perche de 8 m de long, de 48 mm de diamètre extérieur et 45 mm de diamètre intérieur. Elle pèse 3,6 kg et son moment d'inertie est de 17 kg.m^2 ce qui est peu. L'idée est de mettre du poids à chaque extrémité pour augmenter le moment d'inertie.

A cet effet j'utilise du bois rond de 45 mm de diamètre. J'adapte à chaque extrémité un rondin en pin de 35 cm de long que j'insère de 20 cm. Le poids total du balancier passe à 4,1 kg et son moment d'inertie à 28 kg.m^2 ce qui est mieux mais pas encore beaucoup.

Au fait, quel est le moment d'inertie que je dois donner à mon balancier ? L'expérience à l'École de Cirque de Bruxelles montre que les amateurs sont satisfaits avec des balanciers dont le moment d'inertie se situe entre 15 et 60 kg.m^2 . Les funambules professionnels montent plus haut mais ce n'est pas notre propos ici. Le choix dépend bien sûr de la corpulence du funambule et il faut en essayer plusieurs pour choisir celui qui convient le mieux à chacun. Un grand moment d'inertie est préférable mais comme ceci entraîne un supplément de poids il faut chercher un compromis. On peut bien sûr tenter d'allonger la perche mais la rigidité devient un problème. Par ailleurs il faut tenir compte de l'encombrement. L'expérience montre qu'il devient difficile de manœuvrer une perche de plus de 8 m. De plus, s'il faut la transporter, il faut qu'elle soit démontable.

Un balancier en fibre de carbone permet, pour un même poids, d'obtenir un moment d'inertie plus élevé. Pour augmenter le moment d'inertie de mon balancier, j'enroule une feuille de plomb autour du rondin en pin. En mettant 1 kg à chaque extrémité j'obtiens un moment d'inertie de 61 kg/m² ce qui me convient très bien.

Balancier 5

Pour mon épouse j'ai préféré concevoir un balancier plus fin. J'ai donc acquis une perche en fibre de carbone de 39 mm de diamètre extérieur et 36 mm de diamètre intérieur. Il fait 8 m de long comme l'autre. Je l'ai également pourvu d'un élément cylindrique en pin inséré de 20 cm à chaque extrémité. Ce rondin a une longueur de 35 cm et un diamètre de 36 mm. Le poids total du balancier est de 3,2 kg et son moment d'inertie est de 21 kg.m².

Pour en augmenter le moment d'inertie j'ai prévu 4 rondins : 2 avec 350 gr à l'extrémité et 2 avec 700 gr. La perche n'est pas assez rigide pour mettre plus que 700 gr. Le moment d'inertie devient respectivement 32 kg.m² et 44 kg.m².

Comparons maintenant mes balanciers (sans plomb et avec 1 kg de plomb) et ceux de mon épouse (sans plomb, et avec 350 gr ou 700 gr de plomb).

	48mm 0 kg	48 mm 1 kg	39 mm 0 kg	39 mm 350	39 mm 700
Longueur (m)	8.3	8.3	8.3	8.3	8.3
Poids (kg)	4.1	6.1	3.2	3.9	4.6
Moment (kg. m ²)	28	61	21	32	44
Efficiéce (m ²)	6.9	10	6.6	8.4	9.2
Rendement (%)	40	58	39	49	56

Le balancier Ø39 mm avec 350 gr de plomb à chaque extrémité est moins lourd et plus efficace que le balancier Ø48 mm sans plomb (le moment, l'efficiéce et le rendement sont meilleurs). Par contre c'est mon balancier avec 2x1 kg qui est le meilleur de tous. Il est cependant le plus lourd.

Nous avons maintenant assez d'éléments pour aider à la sélection d'un balancier qui convient. La longueur dépend de l'environnement dans lequel on doit évoluer. A l'École de Cirque de Bruxelles un balancier de 6 à 8 m convient. Le poids dépend de la force du funambule. Moins de 5 kg est idéal. Plus de 10 kg est à éviter. Le moment d'inertie devrait être le plus élevé possible compte tenu des autres contraintes. Un enfant sera déjà content avec 15 à 25 kg.m² ; un adulte léger sera satisfait avec 25 à 40 kg.m² ; un adulte lourd aura besoin de 40 à 60 kg.m².